Def un <u>insieme</u> é un collezione di elementi / oggetti senza ripetetizione degli stessi elementi

Notazioni lettere Maiuscole per insiemi
lettere minuscole per gli elementi

A un ~~ii~~ insieme e x un elemento dell' insieme
scritto $x \in A$
(con più di un elemento di A, $x, y \in A$)

Descrivere un insieme

- scrivere in maniere esplicito tutti elementi eg. $A = \{1, 2, 3, 8\}$
- con un descrizione / regole per descrivere gli elementi

eg $B = \{x \mid x$ é un intero pari non negativo $\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

per indicare che x non appartiene all'insieme

$x \notin A$

<u>Uguaglianza</u> due insiemi sono uguali se hanno esattamente gli stessi elementi

$A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$B = \{2, 1\}$

$C = \{1, 2, 2, 1\}$ $\Longrightarrow$

$A = B = C$

<u>Notazione</u> $A \subseteq B$ $\rightarrow$ A é un <u>sottoinsieme</u> di B.

cioé ogni elemento di A é anche un elemento di B.

$\equiv$ $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

$\underbrace{A = B}$ $\iff$ $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

"$\Rightarrow$" Facile

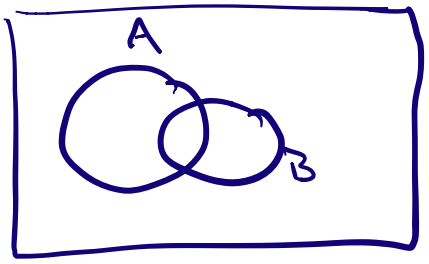
"$\Leftarrow$" equivalente $A \neq B \Rightarrow$

$A \not\subseteq B$ oppure $B \not\subseteq A$

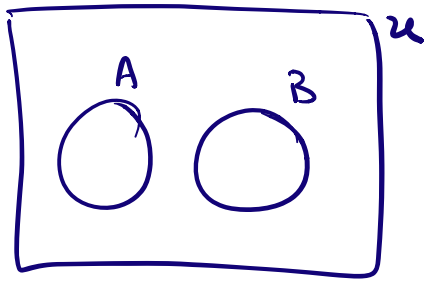
se $A \neq B$ esiste un elemento x in A che non fa parte di B (e quindi $A \not\subseteq B$) oppure $\exists$ un $x \in B$ che non fa parte di A ($B \not\subseteq A$)

$\blacksquare$

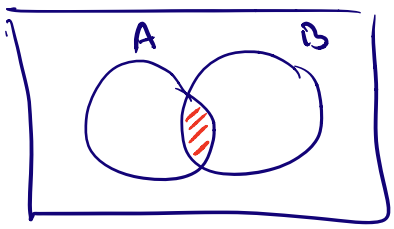
Diagrammi Venn



$\mathcal{U}$ un universo degli elementi che potrebbero far parte dell'insieme, per esempio



A e B sono disgiunti se non hanno elementi in comune. ~~$A \cap B$~~



A e B <u>non</u> sono disgiunti se hanno invece elementi in comune

<u>Def</u> A, B insiemi

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B \}$$

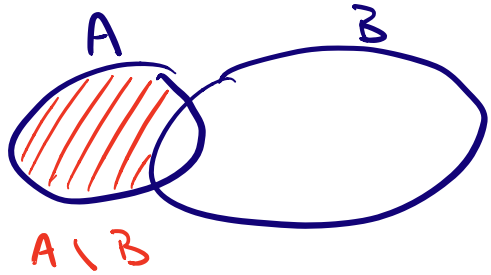
$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ AND } x \in B \}$$

<u>Def</u> complemento di un insieme A

scritto $\overline{A} = \{ x \mid x \in \mathcal{U} \text{ and } x \notin A \}$

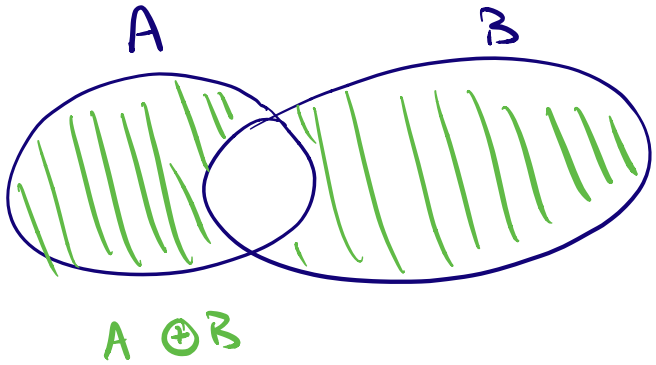
Def Differenza di due insiemi

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \ \underline{\text{AND}} \ x \notin B \}$$



Def Differenza simmetrica di due insiemi

$A \oplus B$ = elementi che fanno parte di esattamente uno dei due insiemi A e B



$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Def insieme vuoto $\emptyset$ è l'insieme che non ha elementi $= \{\}$

Proprietà fondamentali dei insiemi

- idempotenza : $A \cup A = A$ $\quad (A \cap A = A)$
- associatività : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- commutatività : $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$
- distributività : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- identità : $\emptyset \cup A = A$

  $\mathcal{U} \cup A = \mathcal{U}$
- involuzione : $\overline{\overline{A}} = A$
- complementarità : $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- De Morgan : $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

De Morgan (dim):

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Dobbiamo dimostrare:

$$\underbrace{\overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}}_{1} \quad \text{AND} \quad \underbrace{\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}}_{2}$$

$$\overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \overline{(A \cup B)} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \{x \mid x \notin A \cup B\} \quad \underline{\text{def}} \text{ di } \overline{(A \cup B)}$$

$$= \{x \mid x \notin (\text{insieme di elementi in } A \text{ oppure in } B)\} \quad \text{def di } A \cup B$$

$$= \{x \mid x \notin A \text{ AND } x \notin B\}$$

$$= x \notin A \text{ AND } x \notin B \quad \text{def di } \cap$$

$$= \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{def } \overline{A}$$

$\blacksquare$

<u>es</u> 3 dimostrare 2

Un insieme é <u>finito</u> se ha un numero di elementi in $\mathbb{N}$ <u>oppure</u> se é vuoto

se A sia un insieme $\Leftarrow$ finito, $|A| :=$ il numero di elementi in A detto ~~card~~ cardinalitá di A

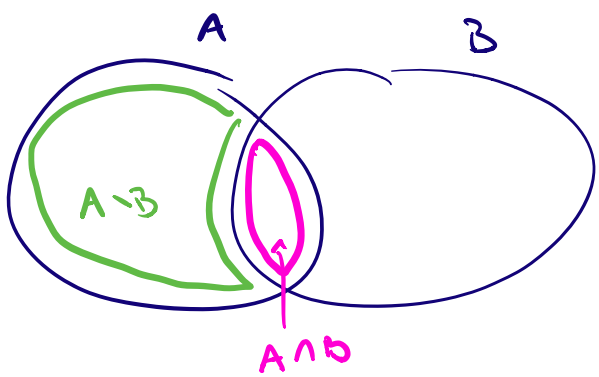
$|\emptyset| := 0$

<u>Prop</u> se A e B sono insiemi finiti disgiunti $(A \cap B = \emptyset)$ allora

$|A \cup B| = |A| + |B|$

<u>Cor</u> $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

<u>dim</u>



$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \qquad \text{disgiunti}$$

$$\Rightarrow$$

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$$

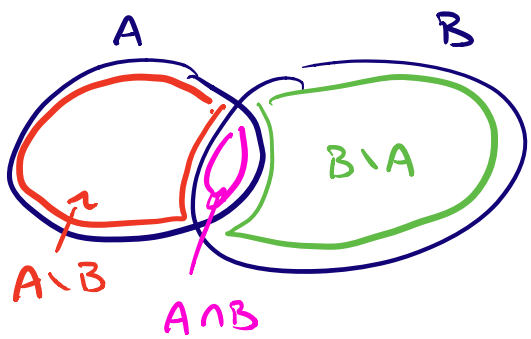
$$\Rightarrow |A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

$\blacksquare$

<u>Teorema</u> A, B insiemi finiti.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

<u>dim</u>



per la prop.

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$

per il cor.

$$|A \cup B| = |A| - \cancel{|A \cap B|} + \cancel{|A \cap B|} + |B| - |A \cap B|$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B|$$

prop A, B, C finiti allora

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

es $A = \{1, 2, 3\}$

ci sono tre sottoinsiemi distinti con 2 elementi $\rightarrow$ insieme B

$$B = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

Def $\mathcal{P}(A)$ (power set di A)

= insieme di tutti i sottoinsiemi di A

per l'esempio sopra $A = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$|\mathcal{P}| = 8 = 2^3$

<u>prop</u> se A finito, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

(dim. domani in classe)

dato la prop sopra, scriviamo 2^A per $\mathcal{P}(A)$

<u>Esempi</u>

$[n] := \{x \mid x \text{ un intero } \in, x > 0, x \leq n\}$

$= \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$

$\rightarrow \binom{A}{k} = \{B \mid B \subseteq A \text{ e } |B| = k\}$

$A \times B :=$ prodotto cartesiano di A e B

$= \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

coppie ordinate

<u>NB</u> $|A \times B| = |A| \cdot |B|$